Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que 1 é um valor próprio de A e determine o subespaço próprio de A associado ao 1.
   (b) Verifique se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal semelhante a A.

3. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A é singular se e só se 0 é um valor próprio de A.

4. Mostre que A e A^T possuem os mesmos valores próprios.

5. Seja A uma matriz quadrada e λ um valor próprio de A. Mostre que

   (a) λ^k é um valor próprio de A^k, para $k \in \mathbb{N}$;
   (b) $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1}, caso A seja invertível.

6. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são matrizes semelhantes.

7. Se A é diagonalizável, mostre que

   (a) A^T é diagonalizável;
   (b) A^k é diagonalizável, para $k \in \mathbb{N}$;
   (c) A^{-1} é diagonalizável, caso A seja invertível.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de A.
   (b) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
   (c) Calcule A^5, utilizando o facto de A ser diagonalizável.

9. Determine os valores dos parâmetros reais a e b para os quais $(1, 1)$ é um vetor próprio e 0 é um valor próprio da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o polinómio caraterístico de A, assim como os seus valores próprios.
   (b) Determine os subespaços próprios de A.
   (c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real k para os quais A é diagonalizável.
   (d) Para os valores de k obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.
   (e) Para $k = -1$, determine A^{2013}.

11. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ e os vetores $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,-1)$ e $w = (1,-1,0)$, onde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,\mu,a,b,c \in \mathbb{R}$ são parâmetros a determinar. Calcule $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,\mu,a,b,c$ de modo a que os vetores u, v e w sejam vetores próprios de A e -1, 0 e 1 sejam valores próprios de B.

12. Sejam $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $X,Y,Z,W \in \mathbb{R}^4$ não nulos tais que $AX = AY = 0$, $AZ = Z$ e $AW = -W$, sendo $\{X,Y\}$ linearmente independente.
    (a) Indique o polinómio caraterístico de A e os valores próprios de A.
    (b) Indique, justificando, se A é diagonalizável e se existe uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída por vetores próprios de A.

13. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Mostre que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

14. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz P diagonalizante ortogonal:

    (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

15. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
    (a) Mostre que 9 é um valor próprio de A.
    (b) Diagonalize A através de uma matriz diagonalizante ortogonal.

16. Seja A uma matriz simétrica 3×3 tal que $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 e $(0,-1,1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio -3.
    (a) Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1.
    (b) Justifique que A é diagonalizável e determine a matriz A.

Exercícios suplementares

17. Seja $A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, com polinómio caraterístico $p_A(\lambda)$.
    (a) Verifique que $p_A(\lambda) = 0$ se e só se $\lambda^n = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.
    (b) Mostre que, se λ é um valor próprio de A, $X_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$ é um vetor próprio associado a λ.
    (c) Justifique que o espaço próprio associado a cada valor próprio λ é $U_\lambda = \langle X_\lambda \rangle$.
    [*Sugestão: as última* $n-1$ *colunas de* $A - \lambda I$ *são linearmente independentes, logo...*]
    (d) Sejam $n = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$. Verifique as propriedades das alíneas anteriores e prove que A não é diagonalizável.

    Considere a sucessão de valores reais (x_k), com $k \in \mathbb{N}_0$, e seja (X_k) a sucessão de vetores em $\mathbb{R}^n$ definida por $V_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1})$ — sendo, portanto, $V_{k+1} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n})$.

    (e) Prove que (x_k) satisfaz a equação de recorrência $x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \cdots + a_1x_{k+1} + a_0x_k$ se e só se $V_{k+1} = AV_k$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$.
    (f) Verifique $V_k = A^kV_0$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. O que acontece quando A é diagonalizável?

18. Seja $P = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ uma matriz cujas colunas são m vetores próprios de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a matriz que contém, na diagonal, os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Note-se que os vetores próprios não têm de ser linearmente independentes, nem têm de ser distintos (ou não nulos) os valores próprios.

   (a) Demonstre a equação matricial dos vetores próprios: $AP = PD$.

   (b) Justifique que $A^2P = PD^2$ e deduza que $A^kP = PD^k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$.

   Para $m = n$, suponha-se que $\det(P) \neq 0$.

   (c) Mostre que $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ é uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Verifique que $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

   (e) Prove que, para qualquer $X \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\left[A^kX\right]_{\mathcal{B}} = D^k[X]_{\mathcal{B}}.$$

Aplicações

19. A sucessão de Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ é definida pela equação de recorrência $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, sendo $k \in \mathbb{N}_0$, $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Seja $V_k = (x_k, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Usando a notação e os resultados do exercício 17,

   (a) determine a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $V_{k+1} = AV_k$ para $k \in \mathbb{N}_0$;

   (b) determine o polinómio caraterístico $p_A(\lambda)$ e calcule os valores próprios de A;

   (c) prove que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonalizante e a matriz diagonal correspondente;

   (d) determine uma fórmula para calcular x_k para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$ e indique o valor de x_{22}.

20. **Modelo de Leontief de economia fechada**. Este modelo descreve uma economia em que todos os bens (ou serviços) produzidos são consumidos pelos próprios setores produtivos. Portanto, em comparação com o modelo apresentado no exercício 47 da primeira folha prática, neste caso não há *procura final* e a *procura* (que corresponde à *procura intermédia*) é igual à produção.

   Suponha-se que existem n indústrias $I_1, \ldots, I_n$ e que, num dado período de tempo, a indústria I_i produz B_i unidades do bem b_i e consome C_{ij} unidades do bem b_j produzido por I_j, com $i, j = 1, \ldots, n$. Então,

   $a_{ij} = \dfrac{C_{ij}}{B_j}$ é a *fração do total de bens produzidos pela indústria j que é utilizado pela indústria i.*

   Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sendo a economia *fechada*, para todo o $j = 1, \ldots, n$ tem-se que

$$a_{1j} + \cdots + a_{nj} = \frac{C_{1j}}{B_j} + \cdots + \frac{C_{nj}}{B_j} = \frac{C_{1j} + \cdots + C_{nj}}{B_j} = 1,$$

   pois o numerador (o total do bem b_j que foi consumido) é igual ao denominador (a quantidade B_j que foi produzida). Isto significa que **a soma das entradas de cada coluna de A é igual a 1**.

   Considere-se agora o seguinte problema: é possível determinar o preço p_i de cada bem b_i para que os custos de produção de cada indústria, para adquirir os bens de que precisa, sejam iguais à receita obtida com a venda do bem produzido (condição de equilíbrio)? Para I_i, a receita é B_ip_i e os custos são $C_{i1}p_1 + \cdots + C_{in}p_n$. Logo, a condição de equilíbrio é $B_ip_i = C_{i1}p_1 + \cdots + C_{in}p_n = a_{i1}B_1p_1 + \cdots + a_{in}B_np_n$ para todo o $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Verifique que, definindo o vetor $X = (B_1p_1, \ldots, B_np_n)$, a condição de equilíbrio é $X = AX$.

   (b) Seja $Y = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Explique por que razão $A^\top Y = Y$.

   (c) Justifique que existe sempre um vetor X que satisfaz $X = AX$ (ou seja, um preço p_i para cada bem b_i que permite atingir a condição de equilíbrio).

1. (a) Valores próprios: $\lambda = 0$; vetores próprios associados: $X_0 = \alpha(1,0,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; não é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui apenas um vetor próprio linearmente independente.

   (b) Valores próprios: $\lambda \in \{-2,1,3\}$; vetores próprios associados: $X_{-2} = \alpha(0,0,1)$, $X_1 = \alpha(6,3,8)$, $X_3 = \alpha(0,5,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (c) Valores próprios: $\lambda \in \{1,3\}$; vetores próprios associados: $X_1 = \alpha(1,-2,0,0) + \beta(0,0,-2,1)$, $X_3 = \gamma(1,0,0,0)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; nao é diagonalizável: é uma matriz 4×4 que possui no máximo três vetores próprios linearmente independentes.

   (d) Valores próprios: $\lambda \in \{1,3\}$; vetores próprios associados: $X_1 = \alpha(-1,0,1)$, $X_3 = \alpha(5,2,-3)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; não é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui no máximo dois vetores próprios linearmente independentes.

   (e) Valores próprios: $\lambda \in \{2,4\}$; vetores próprios associados: $X_2 = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,-1)$, $X_4 = \gamma(-1,1,1)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui três vetores próprios linearmente independentes; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (f) Valores próprios: $\lambda \in \{-2,-1,0\}$; vetores próprios associados: $X_{-2} = \alpha(1,1,2)$, $X_{-1} = \alpha(1,0,1)$, $X_0 = \alpha(1,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) 1 é um valor próprio de A; $U_1 = \langle(5,4,-2)\rangle$. (b) A é diagonalizável e semelhante a $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

8. (a) Os valores próprios de A são 1, 2 e 4 e os subespaços próprios são $U_1 = \langle(-1,1,1)\rangle$, $U_2 = \langle(1,0,0)\rangle$ e $U_4 = \langle(7,-4,2)\rangle$. (b) $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$.

9. $a = b = 1$.

10. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k$ e os valores próprios são $\{1,k\}$. (b) $U_1 = \langle(x,-x)\rangle$ e, para $k \neq 1$, $U_k = \langle(x,-kx)\rangle$. (c) $k \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$. (e) A.

11. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \theta = \mu = 1$, $a = c = 0$ e $b = 1$.

12. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$ e os valores próprios são -1, 0 e 1. (b) Sim, sim.

14. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15. (b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T AP = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

16. (a) $U_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = z\right\}$. (b) A é diagonalizável, pois A é simétrica e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

19. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, com valores próprios $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo) e $-\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; (c) uma matriz diagonalizante é $P = \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz diagonal correspondente $D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$;
(d) $x_k = [1\ 0]V_k = [1\ 0]A^k V_0 = [1\ 0]PD^k P^{-1}V_0 = \frac{\phi^k - (-\phi)^{-k}}{\sqrt{5}}$ (nota: $|P| = 1 + \phi^2 = \sqrt{5}\phi$), sendo $x_{22} = 17711$.